Αλγεβρικές Δομές I (2018-2019)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #10

1. Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f : R \to S$ ένας μη μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων. Να δείξετε ότι $f(1_R) = 1_S$, σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

   (1) Ο ομομορφισμός f είναι επιμορφισμός.

   (2) Ο δακτύλιος S δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.

2. Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f : R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων με την ιδιότητα $f(1_R) = 1_S$. Δείξτε ότι για κάθε αντιστρέψιμο στοιχείο $x \in R$ το στοιχείο $f(x) \in S$ είναι αντιστρέψιμο και ισχύει $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

3. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $1_R \neq 0_R$. Δείξτε ότι ο R είναι σώμα αν και μόνο αν ο R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη.

4. Έστω $f : R \to S$ ομομορφισμός μεταθετικών δακτύλιων με μονάδα με την ιδιότητα $f(1_R) = 1_S$.

   (1) Δείξτε ότι αν J ιδεώδες του S τότε το $f^{-1}(J)$ είναι ιδεώδες του R. Επιπλέον δείξτε ότι αν το J είναι πρώτο ιδεώδες του S τότε και το $f^{-1}(J)$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

   (2) Δείξτε ότι αν f επιμορφισμός και J μεγιστοτικό (maximal) ιδεώδες του S τότε το $f^{-1}(J)$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες του R.

   (3) Έστω $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ η ένθεση. Δείξτε ότι η f είναι μονομορφισμός δακτυλίων. Βρείτε μεγιστοτικό ιδεώδες J του δακτυλίου $\mathbf{Q}$ ώστε το $f^{-1}(J)$ να μην είναι μεγιστοτικό ιδεώδες του $\mathbf{Z}$. Επίσης δείξτε ότι αν $n \geq 2$ ακέραιος και $I = n\mathbf{Z}$, τότε το I είναι ιδεώδες του $\mathbf{Z}$, αλλά το $f(I)$ δεν είναι ιδεώδες του $\mathbf{Q}$.

5. Να βρεθεί, για $n \geq 2$, η χαρακτηριστική των δακτυλίων

$$\mathbf{Z}_{15} \times \mathbf{Z}_{10}, \qquad \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_{15}, \qquad \mathbf{Z}_n[x], \qquad \mathbf{R}^{2\times 2}, \qquad (\mathbf{Z}_2)^{2\times 2}.$$

6. (1) Έστω S υποδακτύλιος του δακτυλίου των ακεραίων $\mathbf{Z}$. Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbf{Z}$ με $S = n\mathbf{Z}$. Άρα το S είναι ιδεώδες του $\mathbf{Z}$.

   (2) Βρείτε παράδειγμα υποδακτύλιου του δακτυλίου $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, ο οποίος να μην είναι ιδεώδες του $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

7. Έστω $n \geq 2$. Να βρεθούν όλα τα πρώτα και όλα τα μεγιστοτικά (maximal) ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbf{Z}_n$.

8. Βρείτε όλα τα ιδεώδη I του δακτυλίου $\mathbf{Z}_{12}$. Για καθένα από αυτά να περιγράψετε τον δακτύλιο πηλίκο $\mathbf{Z}_{12}/I$, δηλαδή βρείτε γνωστό δακτύλιο με τον οποίο να είναι ισόμορφος ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbf{Z}_{12}/I$.